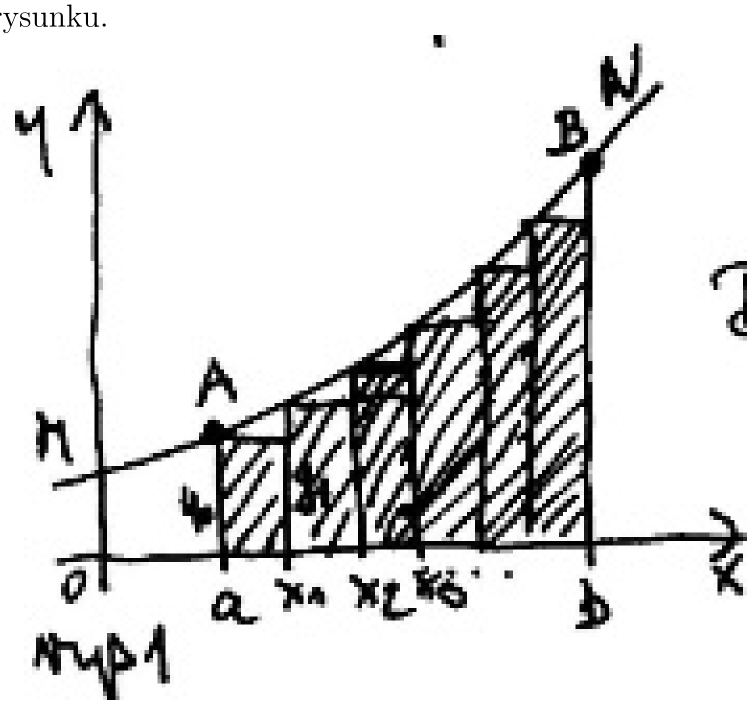
Rachunek całkowy

Rachunek całkowe powstał i był rozwijany z potrzeby rozwiązywania problemów związanych z obliczeniami pól figur, objętości brył, ich powierzchni, długości łuków krzywych i określaniu środków ciężkości figur płaskich i brył.
Podstawy rozwiązywania takich problemów określił Archimedes ale dopiero w siedemnastym wieku nastąpił systematyczny opis metod, którego dokonali Bonawentura Cawallerii oraz Ewangelista Torriceli (obaj byli uczniami Galileusza). Duże zasługi położyli też Fermat, Pascal i wielu innych.
W latach siedemdziesiątych siedemnastego wieku Newton i Leibnitz powiązali te metody z rachunkiem różniczkowym odrywając rachunek całkowy od czysto geometrycznych problemów. Związek z rachunkiem różniczkowym został wykorzystany przez Newtona Leibnitza i ich uczniów do rozwinięcia technik całkowania (Euler Czebyszew Ostrogradski)

Koncepsja całkowania

Niech krzywa MN (rysunek) będzie opisana równaniem $y = f(x)$ i niech będzie naszym zamiarem obliczenie pola trapezu krzywoliniowego $aABb$

Dzielimy przedział (a, b) na n części określonych przedziałami ax_1, x_1x_2, $\ldots$,$x_{n-1}x_n$
Przedziały te mogą być równej długości lub nie. Budujemy figurę schodkową pokazaną na rysunku.



Rysunek 1.
Pole tej figury możemy obliczyć sumując pola wszystkich prostokątów

$$F_n = y_0(x_1 - a) + y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(b - x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x_{k+1} - x_k)$$

gdzie: $x_0 = a$ i $x_n = b$.
Jeśli wprowadzimy oznaczenie $x_1 - x_0 = dx_0$, $x_2 - x_1 = dx_1$,$\ldots$, $x_n - x_{n-1} = dx_{n-1}$, to otrzymamy:

$$F_n = y_0 dx_0 + y_1 dx_1 + \ldots + y_{n-1} dx_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k dx_k$$

Poszukiwane pole figury jest równe granicy powyższego wyrażenia dla n zmierzającego do nieskończoności.
Dla takiej granicy Leibnitz wprowadził symbol $\int y\, dx$ albo $\int f(x)\, dx$.
gdzie: $\int$ jest literą początkową łacińskiego słowa "Summa".

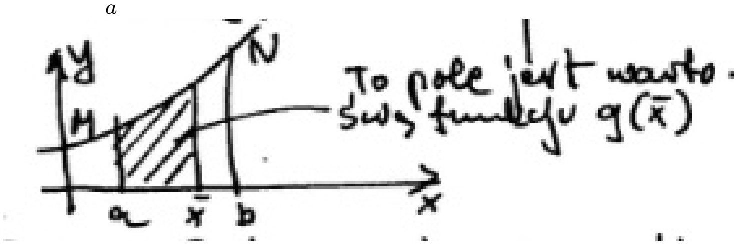
Fourier (1768 - 1830) - francuski matematyk i fizyk zmienił notację Leibnitza i nadał jej postać:
$\int_a^b y\, dx$ albo $\int_a^b f(x)\, dx$ gdzie jawnie występują ppoczątkowa i końcowa wartość zmiennej x.

Związek między całkowaniem i różniczkowaniem

Załóżmy, że a jest stałe a b zmienne. Oznaczmy to zmienne b przez $\overline{x}$.
Wtedy całka $\int_a^{\overline{x}} f(x)\, dx$, która oznacza pole $aANb$ dla stałej wartości a i zmiennej wartości b jest funkcją zmiennej $\overline{x}$.

Mamy więc:

$g(\overline{x}) = \int_a^{\overline{x}} f(x)\, dx$. Funkcja $g(\overline{x})$ nazywa się funkcją "górnej granicy całkowania".



Rysunek 2.

Pochodna funkcji $g(\overline{x})$ jest funkcją $f(\overline{x})$. (Właściwie "różniczka funkcji $g(\overline{x})$ jest równa $f(\overline{x})\, d\overline{x}$).

$$dg(\overline{x}) = d\int_a^{\overline{x}} f(x)\, dx = f(\overline{x})\, d\overline{x}$$

Główny problem rachunku całkowego

Obliczenie całki $\int_a^b f(x)\, dx$ ogranicza się do "znalezienia funkcji z jej danej różniczki".
Podstawowym zadaniem rachunku całkowego jest zatem znalezienie tej funkcji.

Funkcja pierwotna

Definicja 1
Niech funkcja $f(x)$ będzie pochodną funkcji $F(x)$, tzn., że $f(x)\,dx$ jest różniczką funkcji $F(x)$

Czyli $f(x)\,dx = dF(x)$

Wtedy funkcja $F(x)$ jest nazywana "funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Przykład 1 Funkcja $3x^2$ jest pochodną funkcji x^3, tzn. $3x^2\,dx = d(x^3)$.
Zatem x^3 jest funkcją pierwotną funkcji $3x^2$

Przykład 2 Wyrażenie $3x^2\,dx$ jest różniczką funkcji $x^3 + 7$,
bo $3x^2\,dx = d(x^3 + 7) = d(x^3) + d(7) = d(x^3) + 0$.
Zatem funkcja $x^3 + 7$ (tak samo jak funkcja x^3) jest funkcją pierwotną funkcji $3x^2$

Wniosek
Każda ciągła funkcja $f(x)$ ma nieskończoną liczbę funkcji pierwotnych różniących się od siebie o dowolną stałą.

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to każda funkcja postaci $F(x) + C$ (gdzie $C \in \mathbb{R}$) jest także funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Całka nieoznaczona

Całką nieoznaczoną danego wyrażenia $f(x)\,dx$ (dla danej funkcji $f(x)$) jest najbardziej ogólna postać jej funkcji pierwotnej.
Całkę nieoznaczoną wyrażenia $f(x)\,dx$ zapisujemy w postaci $\int f(x)\,dx$
Wyrażenie $f(x)\,dx$ nazywa się wyrażeniem podcałkowym, funkcja $f(x)$ nazywa się funkcją podcałkową, zmienna x jest zmienną całkowania (zmienna, względem której całkujemy).

Znajdowanie całek nieoznaczonych danych funkcji nazywamy całkowaniem.

Przykład 3
Najbardziej ogólną formą funkcji pierwotnej wyrażenia $2x\,dx$ jest $x^2 + c$. Ta funkcja jest zatem całką nieoznaczoną wyrażenia $2x\,dx$.
$\int 2x\,dx = x^2 + C$

Przykład 4
Znaleźć całkę nieoznaczoną wyrażenia $\cos x\,dx$.

Rozwiązanie
Funkcja $\cos x$ jest pochodną funkcji $\sin x$.
Zatem $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

Przykład 5
Znaleźć całkę nieoznaczoną wyrażenia $\frac{1}{x}\,dx$

Rozwiązanie

Funkcja $\frac{1}{x}$ jest nieciągła dla $x = 0$.

Rozważmy zatem najpierw dodatnie wartości x.

Ponieważ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

więc $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C.$ (1)

Z drugiej strony funkcja $\ln(-x)$ jest określona (dla $x < 0$)i jej podcodna jest także równa $\frac{1}{x}$, bo $(\ln(-x))' = (\ln[(-1) \cdot x])' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Więc $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$ (2)

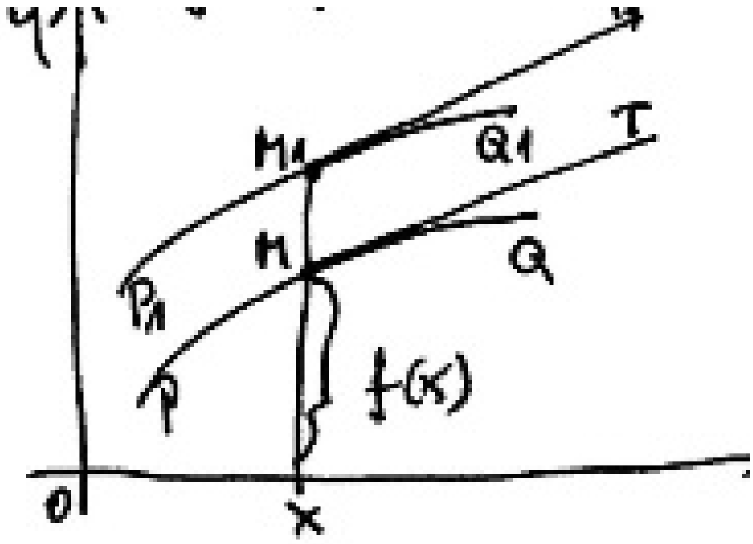
Formuły (1) i (2) można połączyć w jedną:

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (3)

Wyrażenie (3) opisuje całkę nieoznaczoną funkcji $\frac{1}{x}$ dla wszystkich x z wyjątkiem $x = 0$.

Geometryczna interpretacja całkowania

Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą i $F(x)$ będzie jedną z jej funkcji pierwotnych. Jeśli utworzymy wykres funkcji $F(x)$ w postaci krzywej PQ, to nachylenie stycznej jest określone przez wartość funkcji $f(x)$ (Rysunek 3)



Rysunek 3.

Niech $F_1(x)$ będzie inną z funkcji pierwotnych funkcji $f(x)$, której wykres w postaci krzywej P_1Q_1 przedstawia rysunek 3. Styczna do wykresu P_1Q_1 jest równoległa do stycznej do wykresu PQ.

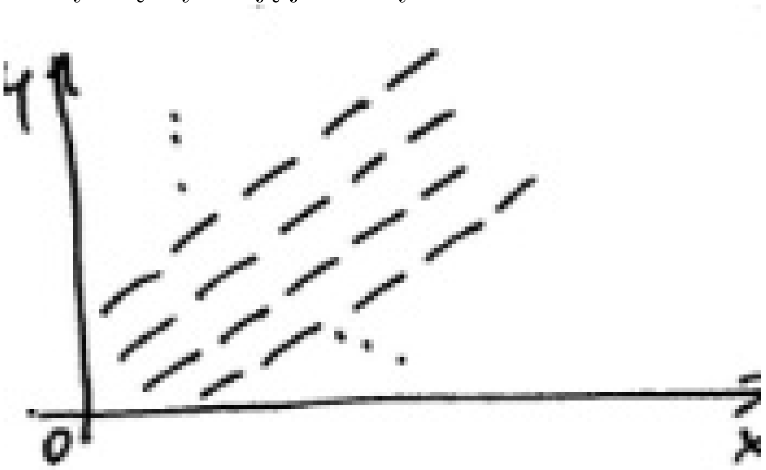
Wykres funkcji pierwotnej nazywa się krzywą całkową funkcji $f(x)$. Różne krzywe całkowe odpowiadające różnym funkcjom pierwotnym są oddalone od siebie o stały dystans.

Krzywe całkowe w przybliżeniu można konstruować następująco.

Przez różne punkty płaszczyzny rysujemy krótkie odcinki określające kierunek stycznej do krzywej całkowej.

Przykład 6 Znaleźć krzywe całkowe całki nieoznaczonej $\int dx$ (całka z funkcji $f(x) = 1$).

Rozwiązanie
Funkcja $f(x) = 1$ jest stała i określa nachylenie stycznej dla każdego x. (45 stopni z dodatnim kierunkiem osi Ox).
Mamy więc sytuację jak na rysunku 4.



Rysunek 4.

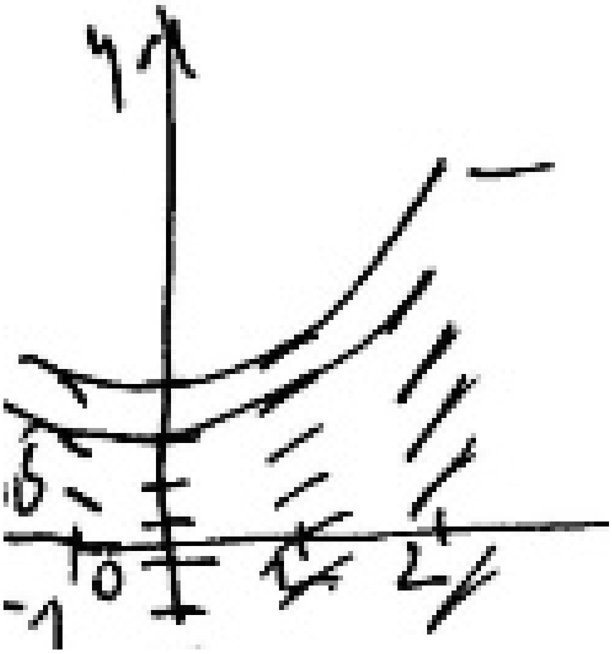
Zatem krzywe całkowe są wykresami funkcji $y = x + C$ gdzie $C \in \mathbb{R}$.

Przykład 7 Znaleźć krzywe całkowe całki nieoznaczonej $\int x\,dx$ (całka z funkcji $f(x) = x$).

Rozwiązanie
Funkcja $f(x) = x$ określa "pole kierunków":

dla $x = 0$ tangens kąta nachylenia jest równy $f(0) = 0$ (kąt 0 stopni)
dla $x = 1$ tangens kąta nachylenia jest równy $f(1) = 1$ (kąt 45 stopni),
dla $x = 2$ tangens kąta nachylenia jest równy 2 (kąt około 63,43 stopnia)
dla $x = -1$ tangens kąta nachylenia jest równy $f(-1) = -1$ (kąt 135 stopni).

Przedstawia to rysunek 5.



Rysunek 5. Wykresy krzywych całkowych $y = \frac{1}{2}x^2 + C$

Własności całki nieoznaczonej

1. Pochodna całki nieoznaczonej jest równa funkcji podcałkowej:

$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \qquad \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$

2. Całka z pochodnej funkcji podcałkowej jest równa dowolnej funkcji postaci $f(x)+C$ gdzie $C \in \mathbb{R}$.

$\int (f(x))'\,dx = f(x) + C$ gdzie $C \in \mathbb{R}$

Tablica najprostszych całek

Każda formuła różniczkowania po odwróceniu staje się formułą całkowania np.

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

dla $a \neq 0$ zatem

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

Uwaga: Wyrażenie $x+\sqrt{a^2+x^2}$ jest dodatnie dla dowolnego x, więc nie musimy pisać $\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$.

Własności całek nieoznaczonych

$\int (f \pm g)\,dx = \int d\,dx \pm \int g\,dx$

$\int af\,dx = a\int f\,dx$

$\int f(x)\,dx = \int f(z)\,dz$

Powyższy wzór przedstawia metodę całkowania przez podstawienie. Np $x = 2z$ skąd $dx = 2dz$.
Wtedy mamy $\int f(x)\,dx = \int f(2z)\cdot 2dz = 2\int f(2z)\,dz$

$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$ (Wzór na całkowanie przez części, który jest konsekwencją wzoru na pochodną iloczynu dwóch funkcji)

Tablica całek

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$

11. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

13. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

14. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$

15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$

16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$